



آزمون ۷ از ۱۴



شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.
امام خمینی (ره)

پاسخ تشریحی آزمون آزمایشی سنجش دوازدهم - مرحله پنجم (۱۴۰۲/۱۰/۲۲)

علوم ریاضی و فنی (دوازدهم)

کارنامه آزمون، عصر روز برگزاری آن از طریق سایت اینترنتی زیر قابل مشاهده می باشد:

www.sanjeshserv.ir

مدیران، مشاوران و دبیران محترم دبیرستان ها و مراکز آموزشی

به منظور فراهم نمودن زمینه ارتباط مستقیم مدیران، مشاوران و دبیران محترم دبیرستان ها و مراکز آموزشی همکار در امر آزمون های آزمایشی سنجش و بهره مندی از نظرات ارزشمند شما عزیزان در خصوص این آزمون ها ، آدرس پست الکترونیکی test@sanjeshserv.com معرفی می گردد. از شما عزیزان دعوت می شود، دیدگاه های ارزشمند خود را از طریق آدرس فوق با مدیر تولیدات علمی و آموزشی این مجموعه در میان بگذارید.



@sanjesheducationgroup



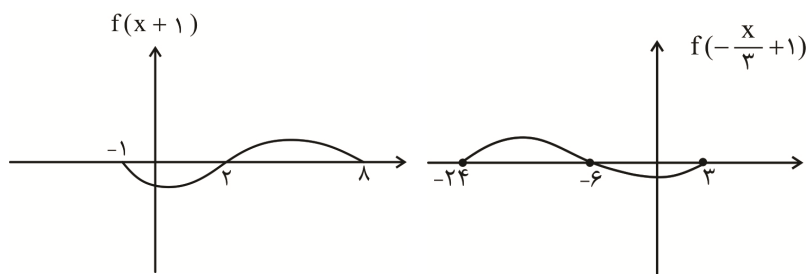
@sanjeshserv

کانال های ارتباطی:

ریاضیات

۱. گزینه ۳ درست است.

نمودار تابع $f(1 - \frac{x}{3})$ را رسم می‌کنیم:



عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم:

	-24	-6	0	3	
$f(1 - \frac{x}{3})$	+	-	-	-	
x	-	-	+	-	
p	-	+	-	-	

$D = [-6, 0) \cup \{-2, 4, 3\}$

دامنه تابع شامل ۸ عدد صحیح است.

۲. گزینه ۲ درست است.

قرینه نسبت به محور y ها $y = \frac{-2x}{-x-3} = \frac{2x}{x+3}$

$y = \frac{2(x+2)}{x+2+3} - k = \frac{2x+4}{x+5} - k \Rightarrow g(-3) = -3 \Rightarrow \frac{-2}{2} - k = -3 \Rightarrow k = 2$

۳. گزینه ۲ درست است.

$g(x) = 2 + \sqrt{3 - (x-2)} + 1 \Rightarrow g(x) = \sqrt{5-x} + 3$

تابع g نزولی است؛ پس:

$$g(g(x)) < g(x) \Rightarrow g(x) > x \Rightarrow \sqrt{5-x} + 3 > x \Rightarrow \sqrt{5-x} > x-3 \Rightarrow 5-x > x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 < 0 \Rightarrow x < 4$$

از طرفی شرایط دامنه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x \in D_g \Rightarrow x \leq 5 \\ g(x) \in D_g \Rightarrow \sqrt{5-x} + 3 \leq 5 \Rightarrow \sqrt{5-x} \leq 2 \Rightarrow 5-x \leq 4 \Rightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

نتیجه نهایی آن است که $1 \leq x < 4$ است که شامل سه عدد صحیح است.

۴. گزینه ۱ درست است.

$$f(x) = (x-1)(x+2)g(x) + 3x - 1$$

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-2) = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b - 3 = 2 \\ 4a + b = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = x^5 - 4x^3 - 4x^2 + 9 \\ g(x) = xf(4+x) + f(x+1) \end{cases}$$

$$g(-2) = -2f(2) + f(-1) = -2(-7) + (8) = 22$$

۵. گزینه ۱ درست است.

$$y = \frac{a}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2bx \right) \right) + c$$

از اتحاد $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$y = \frac{a}{2} + c + \frac{a}{2} \sin(2bx)$$

در $X = 0$ تابع صعودی است؛ پس می‌توان a و b را مثبت فرض کرد.

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + c + \left| \frac{a}{2} \right| = 2 \\ \frac{a}{2} + c - \left| \frac{a}{2} \right| = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 3$$

$$T = \frac{2\pi}{2b} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2}$$

۶. گزینه ۴ درست است.

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2, \frac{1}{2}$$

$$\tan \beta = \tan(\alpha + \beta - \alpha) = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \cdot \tan(\alpha + \beta)} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 1} = \frac{3}{4}$$

$$\tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{24}{7}$$

۷. گزینه ۳ درست است.

$$\frac{1}{\cot 2x} = 2 \sin x \Rightarrow 2 \sin x = \tan 2x \Rightarrow 2 \sin x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos 2x}$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi \\ \cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = \pm x + 2k\pi \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

غ ق ق

پس فقط $x = \frac{2\pi}{3}$ و $x = \frac{4\pi}{3}$ قابل قبول است که جمع آن‌ها برابر 2π است.

۸. گزینه ۴ درست است.

$$\frac{2 \cos^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin \frac{nx}{2} \cos \frac{nx}{2}} = \cot x \Rightarrow \cot \frac{nx}{2} = \cot x \Rightarrow \frac{nx}{2} = x + k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{n-2}$$

$$\frac{2\pi}{n-2} \geq \pi \Rightarrow n-2 \leq 2 \Rightarrow n \leq 4$$

کوچک‌ترین جواب برابر $\frac{2\pi}{n-2}$ است که باید خارج بازه باشد.

به‌ازای $n = 5$ جواب معادله $x = \frac{2\pi}{3}$ در معادله صدق می‌کند.

۹. گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{3-a}{a \times 0^+} = +\infty \Rightarrow \frac{3-a}{a} > 0 \Rightarrow 0 < a < 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{3}{a \times 0^-} = -\infty \Rightarrow a > 0$$

پس $0 < a < 3$ و $0 \leq [a] \leq 2$ است.

۱۰. گزینه ۳ درست است.

$$f(x) = ax + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax + b + \sqrt{x^2 + 2x}}{ax + b} = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - x}{ax} = \frac{a-1}{a} = \frac{2}{3}$$

پس $a = 3$ و $b = -3$ است. $f(0) = b = -3$

۱۱. گزینه ۴ درست است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \log_2\left(\frac{a}{-2}\right) = b \Rightarrow -\frac{a}{2} = 2^b \Rightarrow a = -2^{b+1}$$

a عددی است منفی پس $x = 2$ نمی‌تواند ریشهٔ مخرج کسر $\frac{ax+8}{4a-2x}$ باشد پس باید ریشهٔ صورت کسر باشد.

$$ax + 8 = 0 \xrightarrow{x=2} a = -4 \Rightarrow f(x) = \log_2 \frac{-4x+8}{-8-2x} = \log_2 \frac{2x-4}{x+4}$$

تابع $y = \frac{2x-4}{x+4}$ در دو طرف ریشهٔ مخرج صعودی است، پس نمودار f در اطراف مجانب افقی صعودی است که فقط گزینه ۴ به این صورت است.

۱۲. گزینه ۲ درست است.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(k - 2f(x)) = f(k - 4)$$

برای آنکه مجانب افقی نداشته باشد باید $k - 4 = 1$ باشد که حد وجود نداشته باشد؛ پس $k = \beta = 5$ است.

برای وجود مجانب قائم باید $k - 2f(x) = 1$ باشد معادلهٔ $f(x) = 2$ جواب ندارد؛ پس: $k - 4 = 1 \Rightarrow k = \alpha = 5$

پس $\alpha + \beta = 10$ است.

۱۳. گزینه ۴ درست است.

اگر بخواهیم ماتریس‌ها را در هم ضرب کنیم بسیار زمان‌بر است. پس بهتر است، A^4 را ماتریس D بنامیم و به شیوهٔ زیر عمل کنیم:

$$D = A \times A \times A \times A \Rightarrow d_{23} = [A \text{ سطر دوم}] \times A \times A \times [A \text{ ستون سوم}]$$

$$\Rightarrow d_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 1 \times 1 - 2 \times 1 + 1 \times (-2) = -3$$

۱۴. گزینه ۴ درست است.

با ضرب A در دو طرف معادله داده شده، خواهیم داشت:

$$A^{-1} + A = 4I \Rightarrow A \times A^{-1} + A \times A = 4A \times I \Rightarrow I + A^2 = 4A \Rightarrow A^2 = 4A - I \quad (*)$$

$$A^4 = (A^2)^2 \Rightarrow A^4 = (4A - I)^2 = 16A^2 - 8A + I = 16(4A - I) - 8A + I = 64A - 16I - 8A + I = 56A - 15I$$

۱۵. گزینه ۳ درست است.

برای اینکه دستگاه، بی‌شمار جواب داشته باشد، باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد. پس:

$$\begin{vmatrix} k^2 & k^2 - k - 1 \\ k & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -k^2 - (k^2 - k^2 - k) = 0 \Rightarrow k^2 - k = 0 \Rightarrow k(k-1)(k+1) = 0$$

$$\Rightarrow k = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } -1$$

حال باید از شرط $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ در دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ بهره بگیریم. توجه کنید که به ازای $k = \pm 1$ داریم:

$$k = \pm 1 \Rightarrow \frac{k^2}{k} = \frac{k^2 - k - 1}{-1} = \frac{k^2}{k} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \pm 1 \quad \text{پس: } \frac{c}{c'} = \frac{k^2}{k} = k$$

به ازای $k = 0$ دستگاه تبدیل به $\begin{cases} -y = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$ می‌شود. پس به ازای $k = 0$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد؛ زیرا با شرط $y = 0$ ،

x هر عدد حقیقی می‌تواند باشد. در نتیجه به ازای هر سه مقدار -1 یا 1 یا 0 دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

۱۶. گزینه ۱ درست است.

$$A = \begin{bmatrix} |A| & -2 \\ 2|A^2| & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 \times |A| - (-2 \times 2|A^2|) = 4|A^2| + 3|A|$$

از آن جا که $|A^2| = |A|^2$ ، پس برابری بالا به صورت زیر درخواهد آمد:

$$|A| = 4|A|^2 + 3|A| \Rightarrow 4|A|^2 + 2|A| = 0 \Rightarrow 2|A|(2|A| + 1) = 0$$

$$\xrightarrow{|A| \neq 0 \text{ وارون پذیر}} 2|A| + 1 = 0 \Rightarrow |A| = -\frac{1}{2} \quad (*)$$

حال با بسط نسبت به سطر دوم ماتریس B (که درایه صفر دارد و بسط نسبت به آن، ساده تر است) داریم:

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 3 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 + 4) - 3(-2 - 9) = -1 + 33 = 32$$

با توجه به اینکه می‌دانیم $|kB_{3 \times 3}| = k^3 |B|$ ، خواهیم داشت:

$$||A|B| = |A|^3 \times |B| = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times 32 = -4$$

۱۷. گزینه ۱ درست است.

چون A قطری است، پس همه درایه‌های بیرون قطر اصلی آن صفر هستند و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} x + z + 2 = 0 \\ 3x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = -2 \\ z = -3x \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} x = 1 \\ z = -3 \end{cases}$$

$$y + z + 4 = 0 \xrightarrow{z = -3} y - 3 + 4 = 0 \Rightarrow y = -1$$

و طبیعی است که برای $y = -1$ و $z = -3$ مقدار درایه سطر سوم و ستون دوم A ، یعنی $5 - 2z - y$ ، نیز برابر صفر

$$A = \begin{bmatrix} x - 2y & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x + 2z}{3} & 0 \\ 0 & 0 & y - x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

می‌شود. پس:

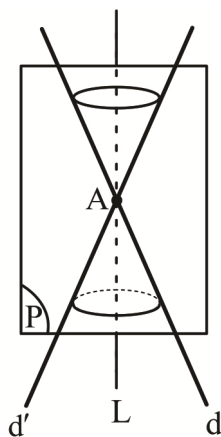
و بنابر مطلب صفحه ۳۰ کتاب هندسه ۳، دترمینان هر ماتریس قطری برابر حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی آن است، از این‌رو:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times \frac{-5}{3} \times -2 = 10 \Rightarrow |A^T| = |A| = 10$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & x & y \\ z & x & -y \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{بسط نسبت به سطر سوم}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1 - (-1)) - (2 - (-3 \times 1))$$

$$= 2 - 5 = -3 \Rightarrow |A^T B| = |A^T| |B| = 10 \times -3 = -30$$

۱۸. گزینه ۲ درست است.



بنابر تعریف رویه مخروطی و مطالب صفحه‌های ۳۴ و ۳۵ کتاب هندسه ۳ و نیز تمرین ۵ در صفحه ۳۹، اگر صفحه P شامل محور یک رویه مخروطی باشد، شکل پدیدآمده از برخورد P و رویه، دو خط متقاطع d و d' (خطهای پررنگ) هستند که در شکل روبه‌رو رسم شده‌اند و در رأس رویه، یعنی نقطه A با هم برخورد می‌کنند.

۱۹. گزینه ۲ درست است.

روش اول: فرض کنیم R شعاع و O مرکز دایره باشد. بنابر فرمول $R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ در معادله هر دایره به فرم

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \text{ در اینجا و از معادله اول در صورت سؤال داریم:}$$

$$R = 2 = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 - 4a} \Rightarrow 4 = \sqrt{20 - 4a} \Rightarrow 16 = 20 - 4a \Rightarrow a = 1$$

پس معادله دوم در صورت سؤال، به فرم $x^2 + y^2 - x + 3y + 3 = 0$ در می‌آید. دوباره و با به‌کارگیری عدد زیر رادیکال $\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ خواهیم داشت:

$$\sqrt{(-1)^2 + 3^2 - 4 \times 3} = \sqrt{10 - 12} = \sqrt{-2}$$

از آنجا که عدد منفی برای زیر رادیکال، تعریف نشده است؛ پس معادله دوم، مکان هندسی تهی است.

روش دوم: با مربع‌سازی عمل می‌کنیم. داریم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + a = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + a = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = \underbrace{\Delta - a}_{=R^2} \Rightarrow \Delta - a = 4 \Rightarrow a = 1$$

جای گذاری در معادله دوم $\rightarrow x^2 + y^2 - x + 3y + 3 = 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 3 = 0$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{10}{4} - 3 = \frac{10-12}{4} < 0$$

که ناممکن است، زیرا مجموع مربع دو عدد، هیچگاه منفی نمی شود. پس مکان هندسی تهی است.

۲۰. گزینه ۱ درست است.

در دایره ای که به هر دو محور مختصات مماس است، طول و عرض مرکز و شعاع دایره با هم برابرند. چون نقطه داده شده در ربع سوم است، پس با فرض اینکه O مرکز و R شعاع دایره باشد، داریم:

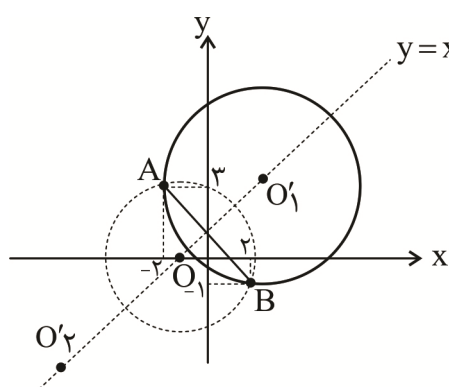
$$R, O(-R, -R) \Rightarrow \begin{cases} O(-R, -R) \\ A(-2, -4) \end{cases} ; |OA|^2 = R^2 \Rightarrow (R-2)^2 + (R-4)^2 = R^2$$

شعاع دایره

$$\Rightarrow R^2 - 12R + 20 = 0 \Rightarrow (R-10)(R-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R=2 \\ R=10 \end{cases} \Rightarrow |R_1 - R_2| = 8$$

۲۱. گزینه ۳ درست است.

نقطه برخورد خط $y = x + 1$ با محور xها، یعنی $O(-1, 0)$ مرکز دایره کوچک تر (دایره خط چین) است. پس اگر O' را مرکز دایره بزرگ تر بنامیم، با توجه به شرط $OO' = 5\sqrt{2}$ داریم:



$$\begin{cases} O'(x, x+1) \\ O(-1, 0) \end{cases} \Rightarrow OO' = \sqrt{(x+1)^2 + (x+1)^2} \text{ چون } O' \text{ روی خط } y = x+1 \text{ قرار دارد}$$

$$\Rightarrow OO' = |x+1|\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow |x+1| = 5 \Rightarrow x = \begin{cases} 4 \\ -6 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \text{مرکزهای ممکن برای} & \begin{cases} O'_1(4, 5) \\ O'_2(-6, -5) \end{cases} & \xrightarrow{\text{شعاعهای ممکن برای}} & \begin{cases} R_1 = O'_1A = \sqrt{(4+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{40} \\ R_2 = O'_2A = \sqrt{(-6+2)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{80} \end{cases} \\ \text{دایره بزرگ تر} & & & \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \text{معادله های دایره بزرگ تر} : \begin{cases} (x-4)^2 + (y-5)^2 = 40 \\ (x+6)^2 + (y+5)^2 = 80 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{محاسبه و ساده کردن}} \begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 12x + 10y - 19 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = -8-10+1 = -17 \\ a+b+c = 12+10-19 = 3 \end{cases}$$

۲۲. گزینه ۱ درست است.

همان طور که در کتاب درسی آمده است، می توان با اثبات بازگشتی نشان داد که اگر a و b دو عدد هم علامت غیر صفر باشند، آنگاه:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \xrightarrow{ab > 0} a^2 + b^2 \geq 2ab$$

ابتدا این رابطه را اثبات می‌کنیم:

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \quad (\text{رابطه بدیهی})$$

حال در سؤال خودمان اگر برای سهولت محاسبات، تغییر متغیرهای $x + 1 = A$ و $y + 2 = B$ را انجام دهیم، آنگاه:

$$(x + y + 3) \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+2} \right) = (A + B) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) = \frac{A}{A} + \frac{A}{B} + \frac{B}{A} + \frac{B}{B} = 2 + \frac{A}{B} + \frac{B}{A}$$

A و B مثبت هستند، پس هم‌علامت هستند. بنابراین مطابق آنچه بالاتر ثابت کردیم داریم:

$$\frac{A}{B} + \frac{B}{A} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{A}{B} + \frac{B}{A} + 2 \geq 4$$

۲۳. گزینه ۲ درست است.

گیریم $d = (a, b)$ باشد؛ در این صورت بنابر ویژگی‌های بخش‌پذیری در صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳ کتاب ریاضیات گسسته داریم:

$$\begin{cases} d | a \\ d | b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | ma \\ d | na \end{cases} \xrightarrow{d \in \mathbb{N}} d | (ma + nb) = 1 \Rightarrow d = 1$$

پس $(a, b) = 1$ ، که یعنی دو عدد a و b نسبت به هم اول‌اند (با همین استدلال می‌توان گفت که دو عدد m و n نیز نسبت به هم اول‌اند). حال بنابر مطالب پایانی صفحه ۱۳ کتاب ریاضیات گسسته می‌توان نوشت:

$$[(a^2, ab), [a, b]] = [a(a, b), |ab|] = [a, |ab|] = |ab|$$

بنابر تعریف (ک.م.م.)

۲۴. گزینه ۴ درست است.

نخست توجه کنید که اگر $a \equiv b$ و $a \equiv b$ و $a \equiv b$ آنگاه $a \equiv b$ در اینجا کافی است بنابر اینکه $117 = 9 \times 13$ ، پیمانه‌ها را ۹ و ۱۳ در نظر بگیریم. داریم:

$$\begin{cases} 4^3 \equiv 1 \\ 4^2 \equiv 3 \Rightarrow 4^3 \equiv 12 \equiv -1 \Rightarrow 4^6 \equiv 1 \end{cases} \quad (*)$$

به توان ۲

پس با توجه به اینکه طرفین یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان به توان رسانید، در سطر اول محاسبه‌های بالا نیز می‌توانیم بنویسیم $4^6 \equiv 1$ ، که به کمک این رابطه و رابطه (*) و مطلب آمده در آغاز پاسخ، خواهیم داشت:

$$(4^6)^m \equiv 1 \Rightarrow 4^{6m} \equiv 1 \quad (m \in \mathbb{N})$$

یعنی در صورت سؤال، n باید به صورت $6m$ (مضرب‌های ۶) باشد و در نتیجه:

$$10 \leq 6m \leq 99 \Rightarrow 2 \leq m \leq 16 \Rightarrow \text{تعداد } m \text{ ها} = (16 - 2) + 1 = 15$$

توجه: آن دسته از دانش‌آموزان که عادت به بهره‌گیری از روش فرما دارند، دقت کنند که اگر در اینجا به روش فرما پیش بروند، به مضرب‌های ۱۲ (گزینه ۲) می‌رسند که خطاست!

۲۵. گزینه ۳ درست است.

عدد ۶ رقمی داده‌شده به جهت اینکه رقم یکان زوج دارد، بر ۲ بخش‌پذیر است. حال برای اینکه این عدد بر ۲۲ نیز بخش‌پذیر باشد، باید بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، پس باید داشته باشیم:

$$\overline{8a5b36} \equiv 0 \Rightarrow 6 - 3 + b - 5 + a - 8 \equiv 0 \Rightarrow a + b \equiv 10 \Rightarrow a + b = 10 \quad (*)$$

$$\overline{8a5b36} \equiv 8 + a + 5 + b + 3 + 6 \equiv a + b + 4 \equiv 10 + 4 \equiv 5 \quad (*)$$

بنابراین باقی مانده تقسیم این عدد بر ۹ برابر ۵ است.

۲۶. گزینه ۳ درست است.

بنابر داده‌های سؤال: $a = 7k + 3$ ؛ از طرفی $a = b \times 4 + 23$ است. بنابر شرط باقی مانده در الگوریتم تقسیم داریم:

$$r < b \Rightarrow 23 < b \Rightarrow 24 \leq b$$

$$a = 7k + 3 \Rightarrow a \equiv 3$$

حال داریم:

$$4b + 23 \equiv 3 \Rightarrow 4b \equiv -20 \Rightarrow b \equiv -5 \equiv 2 \Rightarrow b = 7q + 2$$

بنابراین:

از طرفی چون $24 \leq b$ ، بنابراین کوچک‌ترین مقدار طبیعی b ، زمانی است که $q = 4$ ، که در این صورت: $b = 30$. بنابراین:

$$a_{\min} = 30 \times 4 + 23 = 143 \Rightarrow a = 143$$

۲۷. گزینه ۲ درست است.

گیریم $d = (9n + 7, 14n - 4)$ ، پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases} d \mid 14n - 4 \\ d \mid 9n + 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d \mid 9(14n - 4) = 126n - 36 \\ d \mid 14(9n + 7) = 126n + 98 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل را می‌شمارد}} d \mid 126n + 98 - (126n - 36) \Rightarrow d \mid 134$$

از آنجا که $134 = 2 \times 67$ و $d > 2$ ، پس باید $d = 67$ باشد. در نتیجه $67 \mid 9n + 7$ و $67 \mid 14n - 4$. بنابر تعریف معادله هم‌نهشتی می‌توانیم بنویسیم:

$$9n \equiv -7 \quad \text{و} \quad -7 \equiv 60 \Rightarrow 9n \equiv 60$$

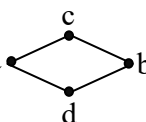
$$\xrightarrow{(3,67)=1} 3n \equiv 20 \equiv 20 + 67 = 87 \xrightarrow{(3,67)=1} n \equiv 29 \Rightarrow n = 67k + 29 (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow n = 143 \Rightarrow \text{مجموع رقم‌های } 143 = 1 + 4 + 3 = 8$$

۲۸. گزینه ۴ درست است.

بررسی گزاره‌ها:

الف) نادرست است؛ زیرا در گراف a دو رأس a و b متمایزند ولی $N_G(a) = N_G(b) = \{b, c\}$.



ب) درست است؛ زیرا اگر سه رأس از گراف ساده G از مرتبه ۴، تنها باشند باید رأس چهارم نیز تنها باشد (گراف تهی در روبه‌رو) و در گراف‌های ساده، هیچ رأسی طوقه ندارد.

پ) درست است؛ زیرا درجه همه رأس‌ها به صورت $\Delta(G) = \delta(G) = r$ درمی‌آید.

ت) نادرست است؛ زیرا گراف فرد - منتظم از مرتبه فرد وجود ندارد.

ث) نادرست است؛ زیرا گراف کامل K_8 دارای $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ یال است.

در نتیجه تنها گزاره‌های «ب» و «پ» درست هستند.

۲۹. گزینه ۱ درست است.

در یک گراف، تعداد مسیرهای به طول صفر با تعداد رأس‌ها و تعداد مسیرهای به طول ۱ با تعداد یال‌ها برابر است. پس در گراف داده شده $p = 6$ و $q = 5$. از طرفی چون گراف مسیری به طول ۵ دارد، پس گراف ما، همان گراف P_6 است.



تعداد مسیرهای به طول غیرصفر، تعداد کل مسیرها بین رئوس متمایز گراف است. چون در گراف P_n بین هر دو رأس، یک و

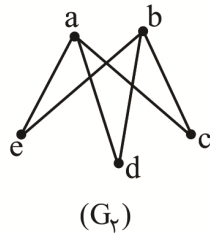
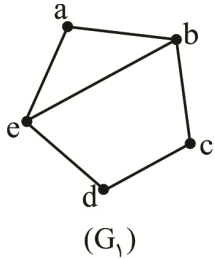
تنها یک مسیر وجود دارد، پس تعداد کل مسیرها بین رئوس متمایز برابر است با $\binom{n}{2}$ ؛ بنابراین:

$$P_6 = \binom{6}{2} = 15$$

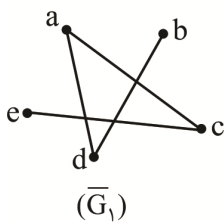
تعداد مسیرهای به طول غیرصفر در گراف P_6

۳۰. گزینه ۲ درست است.

چون G رأس با درجه ۱ ندارد، درجه‌های رأس‌هایش به صورت ۳، ۳، ۲، ۲، ۲ هستند؛ یعنی G از مرتبه ۵ است. گرافی با درجه‌های رئوس یادشده را به دو صورت می‌توان رسم کرد:



در این صورت داریم:



همان‌گونه که روشن است، $\bar{G}_1$ همبند است و همان مکمل گراف مورد نظر ماست همان‌گونه که پیداست، در گراف G_1 سه دور $\overbrace{abcdea}$ ، $\overbrace{ebcde}$ و $\overbrace{abea}$ وجود دارند که دو دور، با طول فرد هستند. با طول ۵ با طول ۴ با طول ۳

فیزیک

۳۱. گزینه ۱ درست است.

گام اول: کل زمان حرکت را ΔT در نظر می‌گیریم. جابه‌جایی متحرک در هر قسمت برابر است با:

$$\Delta x_1 = v_1 \Delta t_1 \Rightarrow \frac{\Delta x}{2} = 30 \Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\Delta x}{60}$$

$$\Delta x_2 = v_2 \Delta t_2 \Rightarrow \frac{\Delta x}{6} = 10 \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{\Delta x}{60}$$

$$\Delta x_3 = v \Delta t_3 \Rightarrow \frac{\Delta x}{3} = v \Delta t_3 \Rightarrow \Delta t_3 = \frac{\Delta x}{3v}$$

گام دوم: با استفاده از رابطه $\bar{v} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots}$ می‌توانیم v را به دست آوریم.

$$15 = \frac{\cancel{\Delta x}}{\frac{\Delta x}{60} + \frac{\Delta x}{60} + \frac{\Delta x}{3v}} \Rightarrow 15 = \frac{1}{\frac{1}{30} + \frac{1}{3v}} \Rightarrow v = 10 \frac{m}{s}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta x \left(\frac{1}{\cancel{60}} + \frac{1}{\cancel{60}} + \frac{1}{3v} \right)} = \frac{2}{30} \text{ یا } \frac{1}{30}$$

(دوازدهم - فصل ۱، صفحات ۱۲ و ۱۳)

۳۲. گزینه ۴ درست است.

حرکت دو متحرک کندشونده بوده و لذا قطعاً دچار تغییر جهت می‌شوند و مطابق فرض، یک‌بار قبل از تغییر جهت و یک‌بار بعد از آن، از کنار یکدیگر می‌گذرند. مکان اولی را مبدأ مختصات فرض کنید:

$$\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{V_1 = 10 \frac{m}{s}} \quad 32 m \quad \xleftarrow{V_2 = -10 \frac{m}{s}} \bullet \\ a_1 = -2 \frac{m}{s^2} \quad \quad \quad a_2 = +2 \frac{m}{s^2} \end{array}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -t^2 + 10t \\ x_2 = +t^2 - 10t + 32 \end{cases}$$

در لحظات تلاقی: $x_1 = x_2 \Rightarrow -t^2 + 10t = +t^2 - 10t + 32$

$$\Rightarrow 2t^2 - 20t + 32 = 0 \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t-8) = 0 \Rightarrow t = \begin{cases} 2s \\ 8s \end{cases}$$

که دومین لحظه تلاقی مورد نظر است. (فصل ۱، صفحات ۱۵، ۱۶، ۱۷)

۳۳. گزینه ۲ درست است.

گام اول: حرکت شامل سه مرحله است. در مرحله اول با شتاب ثابت انجام می‌شود از معادله مستقل از زمان شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{v_0=0} 10^2 = 2 \times a \times 25 \rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

در این مرحله سرعت متحرک را در لحظه $t = 3s$ حساب می‌کنیم تا بعداً بتوانیم شتاب متوسط را به‌دست آوریم:

$$v = at + v_0 \rightarrow v = 2 \times 3 = 6 \frac{m}{s}$$

گام دوم: مرحله دوم حرکت متحرک با سرعت ثابت انجام شده است. از معادله $\Delta x = vt$ ، مدت‌زمان این حرکت را حساب می‌کنیم:

$$50 = 10t \rightarrow t = 5s$$

گام سوم: مرحله سوم حرکت کندشونده با شتاب ثابت است و پس از $2s$ به‌سرعت صفر رسیده است.

گام چهارم: از رابطه شتاب متوسط یعنی $a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$ ، برای بازه $t_1 = 3s$ تا لحظه توقف، استفاده می‌کنیم. قبل از آن

لحظه توقف را می‌یابیم. مدت‌زمان کل حرکت برابر $12s = 5 + 5 + 2$ است و از لحظه $t_1 = 3s$ تا $t_2 = 12s$ می‌توان نوشت:

$$v_2 = 0, v_1 = 6 \frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{0 - 6}{12 - 3} \rightarrow a_{av} = -\frac{2}{3} \frac{m}{s^2}$$

(فصل ۱، صفحات ۱۵ تا ۲۰)

۳۴. گزینه ۴ درست است.

$$h_B = \frac{1}{2}gt^2 \xrightarrow{t=10s} h_B = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^2 = 500m$$

برای گلوله B:

$$h' = h - 375 = 500 - 375 = 125m$$

برای گلوله A:

$$h' = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 125 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \Rightarrow t^2 = 25 \Rightarrow t = 5s$$

پس t' را به‌دست می‌آوریم:

$$t' = 10 - 5 = 5s$$

پس گلوله A، $5s$ دیرتر از گلوله B رها می‌شود. در نتیجه $5s$ در حرکت است.

فاصله دو گلوله در لحظه $t = 6s$:

$$\Delta y_A = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 1^2 = 5m$$

$$\Delta y_B = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 6^2 = 180m$$

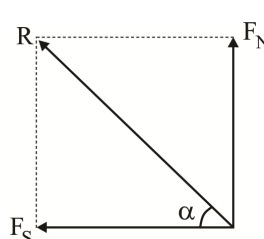
حال فاصله دو گلوله A و B در لحظه $t = 6s$:

$$\Delta h = |\Delta y_B - \Delta y_A| = |180 - 5| = 175m$$

(فصل ۱، صفحات ۲۳، ۲۴)

۳۵. گزینه ۳ درست است.

از لحظه نخست تا لحظه رسیدن جسم به آستانه حرکت، نیروی اصطکاک سکونی به تدریج افزایش یافته و زاویه نیروی سطح با نیروی اصطکاک کاهش می‌یابد:

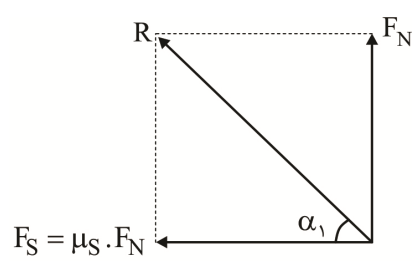


F_N : ثابت
 F_S : افزایش

کاهش: $\alpha \Rightarrow$

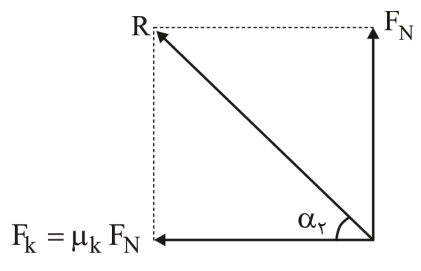
حداقل زاویه هنگامی رقم می‌خورد که جسم در آستانه حرکت باشد. بلافاصله بعد از این لحظه جسم به حرکت درآمده و اصطکاک جنبشی که مقدار آن کوچک‌تر است به جسم وارد می‌شود که موجب می‌گردد زاویه نیروی سطح با نیروی اصطکاک افزایش یافته و روی مقداری معین ثابت بماند. روابط زیر تنها برای توضیح بیشتر تقدیم شما می‌گردد:

در آستانه حرکت:



$$\tan \alpha_1 = \frac{F_N}{\mu_s \cdot F_N} \Rightarrow \tan \alpha_1 = \frac{1}{\mu_s}$$

در خلال حرکت:



$$\tan \alpha_2 = \frac{F_N}{\mu_K \cdot F_N} \Rightarrow \tan \alpha_2 = \frac{1}{\mu_K}$$

با مقایسه $\tan \alpha$ در دو حالت واضح است که چون $\mu_S > \mu_K$ می‌باشد، $\alpha_2 > \alpha_1$ بوده و با به حرکت درآمدن جسم، زاویه نیروی سطح با نیروی اصطکاک افزایش یافته و بر روی مقداری معین ثابت می‌ماند. (فصل ۲، مسائل ترکیبی نیروهای خاص)

۳۶. گزینه ۴ درست است.

گام اول: در حالت اول شتاب آسانسور به طرف پایین است و با توجه به نیروهای وارد بر جسم از قانون دوم نیوتن و رابطه نیروی کشسانی فنر می‌توان نوشت:



$$mg - F_e = ma \quad \xrightarrow{F_e = K(L - L_o)} \quad K(L - L_o) = mg - ma \quad (1)$$

در حالت دوم حرکت جسم به طرف پایین و کندشونده است. پس شتاب جسم رو به بالا است و می‌توان نوشت:



$$F'_e - mg = ma' \quad \xrightarrow{K(L' - L_o)} \quad K(L' - L_o) = mg + ma' \quad (2)$$

گام دوم: اگر طرفین رابطه‌های (۱) و (۲) را از یکدیگر کم کنیم می‌توان نوشت:

$$K(L' - L_0) - K(L - L_0) = mg + ma' - mg + ma$$

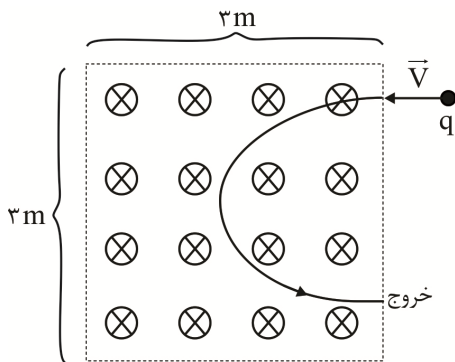
$$K(L' - L) = m(a' + a) \xrightarrow{a' = 2, a = 1 \frac{m}{s^2}} K(6 \text{ cm}) = 2(\text{kg}) \times 3 \frac{m}{s^2}$$

$$K = \frac{6N}{6 \text{ cm}} \rightarrow K = 1 \frac{N}{\text{cm}}$$

(فصل ۲، مسائل ترکیبی نیروهای خاص)

۳۷. گزینه ۳ درست است.

نیروی مغناطیسی وارد بر ذره برای آن در حکم نیروی جانب مرکز بوده و ذره پس از طی یک مسیر نیم‌دایره‌ای، از معرض میدان خارج می‌شود. ابتدا شعاع این مسیر دایره‌ای را تعیین می‌کنیم:



$$F_B = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow q \cancel{v} \cdot B = m \frac{v \cancel{v}}{r}$$

$$\Rightarrow r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} = \frac{4 \times 10^{-6} \times 10^2}{10^{-5} \times 40} = 1 \text{ m}$$

مسافت طی‌شده توسط ذره نصف محیط دایره است.

$$v = \frac{\text{مسافت طی‌شده}}{\Delta t} = \frac{\pi R}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi R}{v} = \frac{3 \times 1}{100} = 0.03 \text{ s} = 30 \text{ ms}$$

(فصل ۲، صفحات ۴۹ تا ۵۲)

۳۸. گزینه ۴ درست است.

$$T = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ s} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$x = \frac{d}{2} - \frac{d}{4} = \frac{d}{4}$$

$$x = A \cos \omega t \xrightarrow[A = \frac{d}{2}]{x = \frac{d}{4}} \frac{d}{4} = \frac{d}{2} \cos 10\pi t$$

$$\cos 10\pi t = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$10\pi t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{1}{30} \text{ s}$$

(فصل ۳، صفحات ۶۲ تا ۶۴)

۳۹. گزینه ۱ درست است.

بررسی عبارت‌ها:

الف) با توجه به اینکه متحرک در مدت ۰/۵ دقیقه ۱۲۰ بار طول مسیر را می‌پیماید می‌توان نتیجه گرفت که در مدت ۰/۵

دقیقه ۶۰ نوسان کامل انجام می‌دهد. پس از رابطه $T = \frac{t}{n}$ دوره نوسان را حساب می‌کنیم:

$$T = \frac{30 \text{ s}}{60} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

پس «الف» نادرست است.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(ب) همچنین بسامد زاویه‌ای نوسان را به دست می‌آوریم:

$$a_m = A\omega^2 \xrightarrow{A=10\text{cm}} a_m = 0.1 \times (4\pi)^2 = 0.16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

بیشینه شتاب متحرک را حساب می‌کنیم:

پس «ب» درست است.

$$S_{av} = \frac{0.2}{\frac{1}{4}} = 0.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$S_{av} = \frac{l}{t} \text{ به ازای } l = 0.2\text{m} \text{ و } t = \frac{T}{2} = \frac{1\text{s}}{4} \text{ داریم:}$$

پس «پ» نادرست است.

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \text{ s}$$

(ت) مدت زمان $\frac{T}{4}$ را حساب می‌کنیم:

(فصل ۳، صفحات ۶۲، ۶۳ و ۶۷)

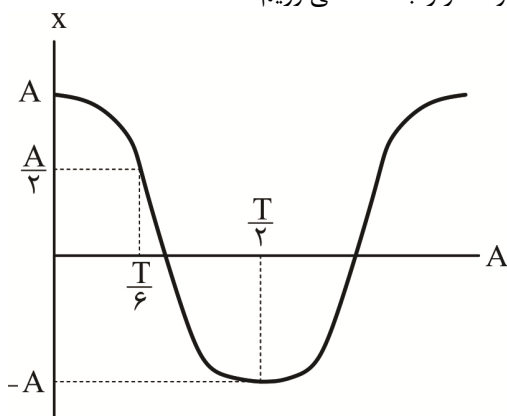
۴۰. گزینه ۴ درست است.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{\omega = \frac{3}{5}\pi} \frac{3}{5}\pi = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{10}{3} \text{ s}$$

گام اول: ابتدا دوره تناوب نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{5}{9} \text{ s} \leq t < \frac{5}{3} \text{ s} \Rightarrow \frac{T}{6} \leq t < \frac{T}{2} \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2} - \frac{T}{6} = \frac{T}{3} = \frac{10}{3} = \frac{10}{9} \text{ s}$$

گام دوم: با استفاده از نمودار مکان - زمان نوسانگر هماهنگ ساده، جابه‌جایی نوسانگر را به دست می‌آوریم:



$$|\Delta x| = |-A - \frac{A}{2}| = \frac{3}{2} A (\text{cm})$$

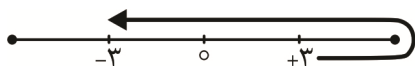
گام سوم: با استفاده از فرمول سرعت متوسط داریم:

$$|V_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{\frac{3}{2} A}{\frac{10}{9}} \Rightarrow A = 4 \text{ cm}$$

(فصل ۳، صفحات ۶۲ تا ۶۴)

۴۱. گزینه ۲ درست است.

از فرض مسئله مشخص است که ابتدا ذره به نقطه بازگشت نزدیک شده و در ادامه به قرینه مکان اولیه می‌رود. با کمی دقت مشخص می‌شود که ذره به اندازه نصف نوسان کامل را طی کرده و طبقاً این حرکت به اندازه نصف دوره تناوب یعنی ۲ ثانیه طول می‌کشد:



$$\bar{V}_{max} = \frac{\Delta x}{\Delta t_{min}} \Rightarrow \bar{V}_{max} = \frac{6 \text{ cm}}{2 \text{ s}} = 3 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

(فصل ۳، صفحات ۶۲ و ۶۳)

۴۲. گزینه ۱ درست است.

گام اول: ابتدا دوره نوسانگر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{T}{12} + \frac{T}{4} + \frac{T}{4} + \frac{T}{12} = 4 \text{ s} \Rightarrow \frac{2T}{3} = 4 \Rightarrow T = 6 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

گام دوم: بسامد زاویه‌ای نوسانگر را به دست می‌آوریم:

گام سوم: با توجه به رابطه بیشینه سرعت نوسانگر داریم:

$$V_{\max} = A\omega \Rightarrow V_{\max} = 3 \times \frac{\pi}{3} = \pi \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

(فصل ۳، صفحات ۶۲، ۶۳، ۶۴ و ۶۷)

۴۳. گزینه ۲ درست است.

گام اول: دوره نوسان را به دست می‌آوریم:

$$\frac{T}{4} + \frac{T}{4} + \frac{T}{4} = 4 \Rightarrow T = 6\text{s}$$

گام دوم: با استفاده از رابطه $x = A \cos \omega t$ معادله نوسانگر را می‌توان نوشت:

$$x = A \cos \omega t \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad x = 0.6 \cos \frac{\pi}{3} t$$

(فصل ۳، صفحات ۶۲، ۶۳، ۶۴)

۴۴. گزینه ۱ درست است.

ثابت می‌شود بین شتاب و مکان یک نوسانگر رابطه زیر وجود دارد:

$$\left. \begin{aligned} a &= -\omega^2 x \\ 2a + 5 \cdot x &= 0 \Rightarrow a = -2.5x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega^2 = 2.5 \Rightarrow \omega = \sqrt{2.5} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \cong \frac{2 \times 3}{\sqrt{2.5}} = 1.2\text{s}$$

برای تحقق حداقل زمان، می‌بایست حول مبدأ که در آن سرعت نوسانگر بیشینه است حرکت کنیم. پس کافی است از مکان

$$x = \frac{1}{2}A \text{ به } x = -\frac{1}{2}A \text{ منتقل شویم.}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{T}{3} - \frac{T}{6} = \frac{T}{6} \Rightarrow \Delta T = \frac{1}{2} = 0.5\text{s}$$

(فصل ۳، صفحات ۶۲، ۶۳ و ۶۴)

۴۵. گزینه ۲ درست است.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.1}{40}} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10} \cong \frac{3}{10}\text{s}$$

گام اول: با استفاده از دوره جرم و فنر یعنی $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ داریم:

گام دوم: با توجه به الگوهای زمانی خاص و مطابق شکل زیر مدت زمان موردنظر را حساب می‌کنیم:

$$\Delta t = \frac{T}{2} + \frac{T}{6} = \frac{4T}{6} = \frac{2}{3}T$$

$$\Delta t = \frac{2}{3} \times \frac{3}{10} = 0.2s$$

(فصل ۳، صفحات ۶۲ تا ۶۵)

۴۶. گزینه ۳ درست است.

گام اول: ابتدا بسامد زاویه‌ای سامانه جرم فنر را به دست می‌آوریم:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{80}{200 \times 10^{-3}}} = 20 \frac{\text{rad}}{s}$$

گام دوم: با استفاده از رابطه بیشینه سرعت داریم:

$$v_{\max} = A\omega \Rightarrow 5 = A \times 20 \Rightarrow A = 0.25m = 25cm$$

گام سوم: در نهایت داریم:

$$\begin{aligned} x_{\min} &= 10cm \\ A &= 25cm \end{aligned} \Rightarrow A = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} \Rightarrow 25 = \frac{x_{\max} - 10}{2} \Rightarrow x_{\max} = 60cm$$

(فصل ۳، صفحات ۶۲ تا ۶۵)

۴۷. گزینه ۱ درست است.

طبق رابطه $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ ، با افزایش طول آونگ، دوره تناوب آن افزایش یافته و طبق فرض ۲۰٪ زیاد می‌شود:

$$T_2 = T_1 + \frac{20}{100}T_1 = \frac{6}{5}T_1$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \xrightarrow{\text{برابر } \frac{36}{25}} \text{برابر } \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \ell_2 = \frac{36}{25}\ell_1 = \ell_1 + 11cm \Rightarrow \frac{11}{25}\ell_1 = 11 \Rightarrow \ell_1 = 25cm$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \xrightarrow{g \cong \pi^2} T = 2\sqrt{\ell}$$

$$\ell_1 = 25cm \Rightarrow T_1 = 2\sqrt{\frac{25}{100}} = 1s$$

$$\ell_2 = 36cm \Rightarrow T_2 = 2\sqrt{\frac{36}{100}} = 1.2s$$

$$N = \frac{60}{T} = \text{تعداد نوسان‌های کامل در مدت یک دقیقه:}$$

$$N_1 = \frac{60}{T_1} = \frac{60}{1} = 60 \text{ نوسان}$$

$$N_2 = \frac{60}{T_2} = \frac{60}{1.2} = 50 \text{ نوسان}$$

$$\text{تفاوت تعداد نوسان‌ها} = N_1 - N_2 = 10$$

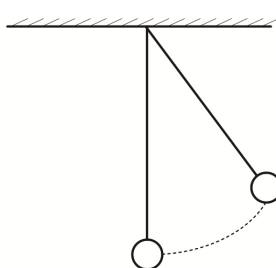
(فصل ۳، صفحات ۶۶، ۶۷)

۴۸. گزینه ۳ درست است.

گام اول: دوره تناوب آونگ را در صورتی که مانعی در مسیر آونگ نبوده، محاسبه می کنیم.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.36}{\pi^2}} = 2(0.6) = 1.2s$$

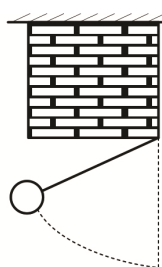


گام دوم: با توجه به شکل، حرکت آونگ تا رسیدن به دیواره، $\frac{1}{4}$ نوسان است و مدت زمان این

نوسان برابر است با:

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1.2}{4} = 0.3s$$

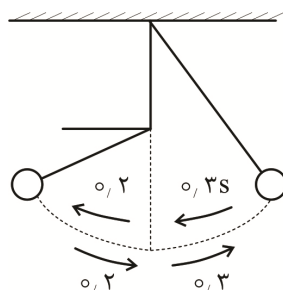
گام سوم: پس از درگیر شدن با مانع (دیوار) فقط قسمت پایین آونگ قادر به نوسان است و طول آونگ تغییر می کند. در این حالت دوره آونگ برابر می شود با:



$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{L'}{g}}, \quad L' = 36 - 20 = 16cm$$

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{0.16}{\pi^2}} \Rightarrow T' = 0.8s$$

حرکت این آونگ تا از راستای قائم انتهای مسیر نیز $\frac{1}{4}$ نوسان است و مدت زمان این نوسان را می توان چنین به دست آورد.



$$t' = \frac{T'}{4} = \frac{0.8}{4} = 0.2s$$

گام ۴: مدت زمان یک نوسان کامل آونگ را حساب می کنیم.

$$T = 2t + 2t' \longrightarrow T = 2 \times 0.3 + 2 \times 0.2 = 1s$$

(فصل ۳، صفحات ۶۴ تا ۶۷)

۴۹. گزینه ۴ درست است.

گام اول: با توجه به اینکه انرژی مکانیکی نوسانگر برابر بیشترین انرژی جنبشی یا بیشترین انرژی پتانسیل آن است و در وسط مسیر انرژی جنبشی بیشینه است داریم:

$$E_1 = K_{\max_1} = 2J$$

گام دوم: می دانیم انرژی مکانیکی نوسانگر متناسب با مجذور بسامد آن است، پس انرژی مکانیکی نوسانگر در حالت دوم برابر است با:

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 \times \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_2}{2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 \times 1 \Rightarrow E_2 = 8J$$

گام سوم: از رابطه $E = K + U$ انرژی پتانسیل نوسانگر را در حالت دوم و به ازای $K = 2J$ حساب می کنیم:

$$8 = 2 + U_2 \rightarrow U_2 = 6J$$

(فصل ۳، صفحات ۶۵ تا ۶۷)

۵۰. گزینه ۳ درست است.

به عنوان یک روش سریع و زیبا، با معلوم بودن نسبت سرعت در هر نقطه به سرعت بیشینه، نسبت انرژی جنبشی به انرژی کل و در ادامه نسبت انرژی پتانسیل به انرژی کل مشخص می شود. توجه کنید انرژی جنبشی با مجذور سرعت متناسب است.

$$v_1 = 2 \frac{m}{s} \Rightarrow \frac{v}{v_{\max}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} K = \frac{1}{9} E \\ U_1 = \frac{8}{9} E \end{cases}$$

$$v_2 = 4 \frac{m}{s} \Rightarrow \frac{v}{v_{\max}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} K = \frac{4}{9} E \\ U_2 = \frac{5}{9} E \end{cases}$$

$$U_1 - U_2 = 10 \text{ mJ} \Rightarrow \frac{8}{9} E - \frac{5}{9} E = 10 \text{ mJ} \Rightarrow \frac{3}{9} E = 10 \text{ mJ} \Rightarrow E = 30 \text{ mJ}$$

(فصل ۳، صفحات ۶۶، ۶۷)

۵۱. گزینه ۱ درست است.

گام اول: با استفاده از رابطه $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ، گستره طول آونگی را که با بسامد زاویه ای $\frac{5}{s} \text{ rad}$ تا $\frac{6}{s} \text{ rad}$ دچار تشدید می شوند، حساب می کنیم:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \xrightarrow{\omega_1=5, g=10} 5 = \sqrt{\frac{10}{L_1}} \Rightarrow L_1 = 0.4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \xrightarrow{\omega_2=6, g=10} 6 = \sqrt{\frac{10}{L_2}} \Rightarrow L_2 = 27.7 \text{ cm}$$

گام دوم: برای اینکه آونگ با دامنه بزرگتری نوسان کند بایستی طول آونگ برابر L یا L_2 باشد. بنابراین از طول آونگ بایستی کاسته شود.

$$50 - 40 = 10 \text{ cm} \quad \text{یا} \quad 50 - 27.7 = 22.3 \text{ cm}$$

(فصل ۳، ص ۶۸)

۵۲. گزینه ۲ درست است.

گام اول: با توجه به نمودار نقش موج، طول موج و بسامد زاویه ای را محاسبه می کنیم:

$$\lambda + \frac{\lambda}{4} = 50 \Rightarrow \frac{5\lambda}{4} = 50 \Rightarrow \lambda = 40 \text{ m}$$

$$\lambda = vT \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{40}{20} = 2 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

حال تندی بیشینه هر ذره را به دست می آوریم:

$$v_{\max} = A\omega \Rightarrow v_{\max} = 10 \times 10^{-2} \times \pi = 3 \times 10^{-1} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{v_{\text{موج}}}{v_{\text{max}}} = \frac{20}{3 \times 10^{-1}} = \frac{200}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

در نهایت داریم:

(فصل ۳، صفحات ۷۰ و ۷۱)

۵۳. گزینه ۲ درست است.

$$\lambda + \frac{\lambda}{2} = 30 \Rightarrow \frac{3\lambda}{2} = 30 \Rightarrow \lambda = 20 \text{ cm}$$

گام اول: ابتدا طول موج را به دست می آوریم:

گام دوم: حال تندی انتشار موج و بسامد زاویه ای را به دست می آوریم:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{45}{1/8}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\lambda = vT \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{20 \times 10^{-2}}{5} = 0.4 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{0.4} = 5\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

گام سوم: با توجه به صورت مسئله داریم:

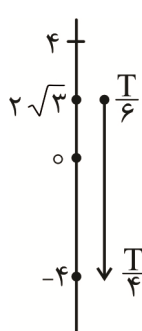
$$\frac{v_{\text{تندی انتشار موج}}}{v_{\text{max ذرات}}} = 0.5 \Rightarrow \frac{v}{A\omega} = 0.5 \Rightarrow \frac{5}{A \times 5\pi} = 0.5 \Rightarrow A = \frac{1}{5\pi} (\text{m})$$

$$a_{\text{max}} = A\omega^2 \Rightarrow a_{\text{max}} = \frac{1}{5\pi} \times (5\pi)^2 = 5\pi \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

گام چهارم: بیشینه شتاب ذرات را داریم:

(فصل ۳، صفحات ۷۰ تا ۷۳)

۵۴. گزینه ۳ درست است.



گام اول: در حالت اول موج به طرف راست حرکت می کند، پس ذره M در حال پایین آمدن است و تا لحظه ای که به مکان $x = -4 \text{ cm}$ می رسد برای اولین بار شتاب ذره بیشینه می شود. با توجه به الگوی زمانی خاص دوره موج مشخص می کنیم:

$$\frac{y_M}{A} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow y_M = \frac{\sqrt{3}}{2} A$$

$$\Delta t = \frac{T}{6} + \frac{T}{4} \rightarrow \frac{1}{12} - 0 = \frac{2T + 3T}{12} \rightarrow 5T = 1 \rightarrow T = \frac{1}{5} = 0.2 \text{ s}$$

گام دوم: در حالت دوم موج به طرف چپ حرکت می کند در لحظه $t = 0$ ذره M در حرکت به طرف بالاست و

با توجه به $T = 0.2 \text{ s}$ ، بازه زمانی $\Delta t = \frac{v}{60} - 0 = \frac{v}{60} \text{ s}$ را در نظر می گیریم و نسبت $\frac{\Delta t}{T}$ را حساب می کنیم:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\frac{v}{60}}{0.2} = \frac{v}{12} \rightarrow \Delta t = \frac{v}{12} T \rightarrow t = \frac{v}{12} T$$

گام سوم: اکنون با استفاده از الگوهای زمانی خاص مکان ذره را در لحظه $t = \frac{v}{12} T$ مشخص می کنیم. با

توجه به شکل مقابل می توان دریافت در لحظه $t = \frac{v}{12} T = \frac{v}{60} \text{ s}$ ، ذره M در مکان $y = -4 \text{ cm}$ است.

گام چهارم: اکنون مسافت طی شده و سپس تندی متوسط را حساب می کنیم:

$$4 - 2\sqrt{3} = 4 - 2 \times 1.73 = 0.6 \text{ cm}$$

$$l = 0.6 + 4 + 4 = 8.6 \text{ cm}$$

$$S_{av} = \frac{\lambda/6 \times 10^{-2} \text{ m}}{\frac{\gamma}{60}} = \frac{516}{\gamma} \times 10^{-2} = 0.73 \quad (\text{فصل ۳، صفحات ۷۰ تا ۷۳})$$

۵۵. گزینه ۳ درست است.

گام اول: با توجه به نقش دو موج، نسبت طول موج و دامنه دو موج را تعیین می‌کنیم.

$$\frac{3\lambda_A}{2} = \lambda_B \Rightarrow \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{A_A}{A_B} = \frac{A}{\frac{1}{3}A} = 3 \Rightarrow A_B = \frac{1}{3}A_A$$

گام دوم: سرعت انتشار دو موج یکسان و برابر است. (هر دو موج در یک طناب منتشر می‌شوند).

$$v_A = v_B = \frac{f = \frac{v}{\lambda}}{\lambda} \rightarrow \frac{f_B}{f_A} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{2}{3}$$

پس می‌توانیم بنویسیم:

گام سوم: مقدار متوسط آهنگ انتقال انرژی (توان متوسط) با مربع دامنه (A^2) و مربع بسامد (f^2) موج متناسب است. بنابراین:

$$\frac{\bar{P}_B}{\bar{P}_A} = \left(\frac{A_B}{A_A}\right)^2 \times \left(\frac{f_B}{f_A}\right)^2$$

$$\frac{\bar{P}_B}{\bar{P}_A} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}$$

(فصل ۳، صفحات ۷۰ تا ۷۳)

شیمی

۵۶. گزینه ۴ درست است.

عبارت‌های «الف»، «پ» و «ت» درست است.

الف: بخش ناقطبی آن دارای ۵۲ اتم (۱۷ اتم کربن و ۳۵ اتم هیدروژن) است که شمار اتم‌های آن دو برابر شمار اتم‌ها در C_8H_{18} است.

ب: فرمول مولکولی اوره $CO(NH_2)_2$ است که در مجموع دارای هشت اتم است. تعداد اتم هیدروژن اسید چرب داده شده ۳۶ است.

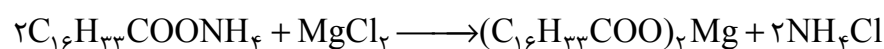
پ: نسبت درصد جرمی کربن در این ترکیب ۶ برابر درصد جرمی هیدروژن است.

$$\frac{\text{درصد جرمی کربن}}{\text{درصد جرمی هیدروژن}} = \frac{12 \times 18}{36} = 6$$

ت: در اسیدهای چرب نیروی بین مولکولی غالب از نوع وان‌دروالس است. مخلوط چربی‌ها با آب و صابون منجر به تولید کلوئید می‌شود که ناهمگن و پایدار است.

۵۷. گزینه ۲ درست است.

فرمول شیمیایی این پاک‌کننده به صورت $C_{16}H_{33}COONH_4$ است. معادله واکنش این ماده با منیزیم کلرید به صورت زیر است:



$$86.1 \text{ g} \times \frac{50}{100} = 43.05 \text{ g}$$

جرم صابون رسوب کرده برابر است با:

حال جرم Mg^{2+} موجود در آب را محاسبه می‌کنیم:

$$43.05 \text{ g صابون} \times \frac{1 \text{ mol صابون}}{287 \text{ g صابون}} \times \frac{1 \text{ mol } Mg^{2+}}{2 \text{ mol صابون}} \times \frac{24 \text{ g } Mg^{2+}}{1 \text{ mol } Mg^{2+}} = 1.8 \text{ g } Mg^{2+}$$

حال می‌توان غلظت Mg^{2+} را محاسبه کرد:

$$ppm \text{ غلظت} = \frac{1/8g}{2000} \times 10^6 = 900$$

۵۸. گزینه ۲ درست است.

ترکیب B الکلی قطبی با سه گروه هیدروکسیل است. این ترکیب از آبکافت استرهای سنگین سه عاملی تولید می‌شود. (روغن زیتون استری سنگین است.)

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) ترکیب A پاک‌کننده غیرصابونی است. پاک‌کننده‌های صابونی و غیرصابونی با آلاینده‌ها واکنش نمی‌دهند و فقط برهم کنش فیزیکی دارند.

(۳) فرمول شیمیایی ترکیب A به صورت $C_{18}H_{29}SO_3Na$ است که اتم‌های هیدروژن آن از قاعده هشت‌تایی پیروی نمی‌کنند.

(۴) سدیم کلرید ترکیبی یونی است و از مولکول مجزا و مستقل تشکیل نشده است.

۵۹. گزینه ۴ درست است.

$$M = \frac{10 \text{ ad}}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 20 \times 1/3}{130} = 2 \text{ mol.L}^{-1}$$

ابتدا مولار اسید را محاسبه می‌کنیم:



$$2-x \quad x \quad x$$

$$2-x = 19/5(2x) \Rightarrow 2-x = 39x \Rightarrow x = 0.05$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log 5 \times 10^{-2} = 1.3$$

برای تعیین pH داریم:

۶۰. گزینه ۱ درست است.

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$[H^+][OH^-] = 10^{-14} \Rightarrow 49 \times 10^{-4} [OH^-]^2 = 10^{-14} \Rightarrow [OH^-] = \frac{1}{7} \times 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[H^+] = 49 \times 10^{-4} \times \frac{1}{7} \times 10^{-9} = 7 \times 10^{-5} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log 7 \times 10^{-5} = -(0.85 - 5) = 4.15$$

۶۱. گزینه ۱ درست است.

نمودار «الف» نادرست است؛ زیرا K_a اسیدها، فقط تابع دماست و با تغییر غلظت تغییر نمی‌کند.

نمودار «ب» درست است؛ زیرا $[H^+][OH^-]$ فقط تابع دماست.

نمودار «پ» نادرست است؛ زیرا پاک‌کننده‌های غیرصابونی در آب سخت خاصیت پاک‌کنندگی خود را از دست نمی‌دهند.

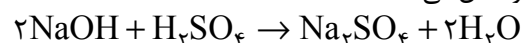
نمودار «ت» نادرست است؛ زیرا محلول متانول در آب غیرالکترولیت است و رسانایی الکتریکی ندارد.

۶۲. گزینه ۲ درست است.

عبارت‌های اول و دوم درست است.

- با افزودن آب به محلول HCl و دو برابر کردن حجم محلول، pH آن 0.3 واحد افزایش می‌یابد.

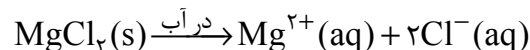
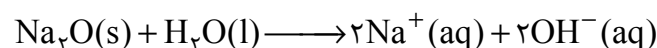
- 0.2 مول سدیم هیدروکسید با 0.1 مول سولفوریک اسید طبق معادله زیر واکنش می‌دهد.



۶۳. گزینه ۳ درست است.

فقط عبارت‌های دوم و پنجم درست هستند.

عبارت اول: نادرست است. از انحلال یک مول سدیم اکسید ۴ مول یون و از انحلال یک مول منیزیم کلرید ۳ مول یون وارد آب می‌شود.



عبارت سوم نادرست است. $CO(NH_2)_2$ (اوره) مانند CH_3COOH (استیک اسید) قابلیت تشکیل پیوند هیدروژنی با

مولکول‌های آب را دارد.

عبارت چهارم نادرست است. معادله یونش HCN مانند معادله یونش HNO_3 برگشت پذیر است. زیرا هر دو اسید، ضعیف هستند. گزینه ۳ درست است.

ابتدا مول اسید و باز را با استفاده از pH های داده شده به دست می آوریم:

$$\text{pH} = 2 \Rightarrow [\text{H}^+] = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \quad V=200\text{mL} \Rightarrow 2 \times 10^{-3} \text{ molH}^+$$

$$\text{pH} = 12 \Rightarrow [\text{OH}^-] = 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1} \quad V=300\text{mL} \Rightarrow 3 \times 10^{-3} \text{ molOH}^-$$

محلول نهایی خاصیت بازی دارد و مولار آن به صورت زیر محاسبه می شود:

$$[\text{OH}^-] = \frac{(3 \times 10^{-3}) - (2 \times 10^{-3})}{0.5\text{L}} = 2 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

پس pH محلول نهایی به صورت زیر محاسبه می شود:

$$[\text{OH}^-] = 2 \times 10^{-3} \Rightarrow [\text{H}^+] = 5 \times 10^{-12} \Rightarrow \text{pH} = -\log 5 \times 10^{-12} = 11.3$$

برای آنکه pH محلول NaOH برابر ۱۱/۳ شد و باید غلظت مولار آن 2×10^{-3} باشد.

$$2 \times 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times \frac{40\text{g}}{1\text{mol}} = 0.08\text{g.L}^{-1}$$

گزینه ۲ درست است.

قدرت اسیدی فورمیک اسید (HCOOH) از استیک اسید (CH_3COOH) بیشتر است.

بررسی سایر گزینه ها:

گزینه ۱ نادرست است. محلول های HF و HCl با $\text{pH} = 3$ رسانایی الکتریکی برابری دارند زیرا غلظت یون ها در دو محلول یکسان است.

گزینه ۳ نادرست است. گرافیت رسانای الکترونی است.

گزینه ۴ نادرست است. اتیلن گلیکول ماده های غیرالکترولیت است و خاصیت بازی ندارد.

گزینه ۴ درست است.

$$0.05\text{g Ba(OH)}_2 \times \frac{1\text{mol Ba(OH)}_2}{171\text{g Ba(OH)}_2} = 0.00029\text{mol Ba(OH)}_2$$

$$M = \frac{0.00029\text{mol}}{0.02\text{L}} = 0.0145\text{mol.L}^{-1}$$

$$[\text{OH}^-] = 0.02 \times 2 = 0.04\text{mol.L}^{-1} \Rightarrow [\text{H}^+] = 2.5 \times 10^{-14} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = 14 - 1.4 = 12.6$$

گزینه ۱ درست است.

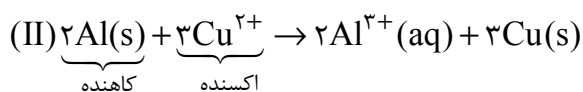
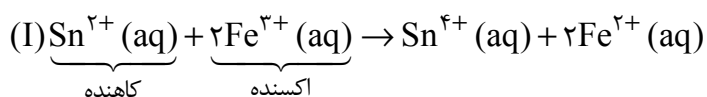
$$K_a = \frac{[\text{H}^+][\text{A}^-]}{[\text{HA}]} \Rightarrow 10^{-3} = \frac{2 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-3}}{[\text{HA}]} \Rightarrow [\text{HA}] = 0.004\text{mol.L}^{-1}$$

غلظت HA پس از یونش ۰/۰۰۴ مولار است، پس غلظت اولیه آن برابر است با:

$$[\text{HA}]_{\text{اولیه}} = 0.004 + 0.002 = 0.006\text{mol.L}^{-1}$$

۶۸. گزینه ۱ درست است.

ابتدا معادله واکنش ها موازنه شوند.



گزینه ۱ درست است. اکسنده واکنش (I) یون Fe^{3+} است که ضریب آن ۲ است و کاهنده واکنش (II) فلز Al است که ضریب آن هم ۲ است.

گزینه ۲ نادرست است. به ازای تولید ۳ مول فلز Cu در واکنش (II)، ۶ مول الکترون مبادله می شود. هر مول Al سه مول الکترون می دهد. پس ۲ مول Al، ۶ مول الکترون از دست می دهد.

گزینه ۳ نادرست است. نیم واکنش اکسایش (I) به صورت $\text{Sn}^{2+}(\text{aq}) \rightarrow \text{Sn}^{4+}(\text{aq}) + 2\text{e}^{-}$ است.

گزینه ۴ نادرست است. اگر واکنش به صورت طبیعی انجام شود اکسنده واکنش دهنده قوی تر از اکسنده فرآورده است.

$\text{Fe}^{3+} > \text{Sn}^{4+}$: قدرت اکسندگی

۶۹. گزینه ۴ درست است.

با توجه به توضیحات موقعیت این سه فلز در جدول E° ها چنین است:

A	عبارت اول نادرست است؛ زیرا فلزات بالای SHE دارای E° مثبت هستند با محلول اسیدها واکنش نمی دهند.
D	عبارت دوم درست است. در سلول A - D، فلز A نقش کاتد را ایفا می کند. در دیواره متخلخل کاتیون ها به سمت نیم سلول کاتدی حرکت می کنند.
E	عبارت سوم نادرست است؛ زیرا قدرت کاهندگی A کمتر از E است پس فلز A نمی تواند به کاتیون E^{2+} الکترون بدهد.
SHE	

عبارت چهارم نادرست است؛ زیرا E° فلز A، D، E را نمی دانیم پس به یقین نمی توانیم emf سلول های D - E و A - D را مقایسه کنیم.

۷۰. گزینه ۲ درست است.

ابتدا emf سلول روی - نقره را حساب کنید:

$$\text{emf} = E_{\text{Ag}}^{\circ} - E_{\text{Zn}}^{\circ} = 0.84 - (-0.76) = 1.6 \text{ V}$$

$$\text{بازده} \% = \frac{1.28 \text{ V}}{1.6 \text{ V}} \times 100 = 80\%$$

$$\text{مول الکترون} = \frac{18.06 \times 10^{23}}{6.02 \times 10^{23}} = 3 \text{ mole}^{-}$$

$$3 \text{ mole}^{-} \times \frac{1 \text{ mol Zn}}{2 \text{ mole}^{-}} \times \frac{65 \text{ g Zn}}{1 \text{ mol Zn}} = 97.5 \text{ g Zn}$$

بازده واکنش ۸۰٪ است، پس باید واکنش دهنده بیشتری مصرف شود.

$$97.5 \times \frac{100}{80} = 121.875 \text{ g}$$

جرم آند (Zn) به اندازه ۱۲۱/۸۷۵ گرم کاهش می یابد.

۷۱. گزینه ۳ درست است.

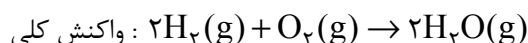
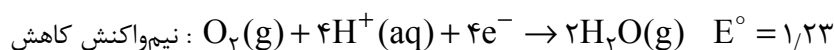
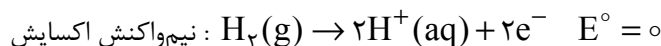
گزینه ۳ درست است.

عبارت «الف» نادرست است؛ زیرا لیتیم کمترین چگالی را در میان فلزها دارد.

عبارت «ب» نادرست است؛ زیرا در سلول سوختی بخش قابل توجهی از انرژی شیمیایی به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.

عبارت «پ» درست است. در سلول سوختی، آند و کاتد کاتالیزگرهایی دارند که باعث افزایش سرعت نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش می‌شوند.

عبارت «ت» درست است. نیم‌واکنش‌های انجام شده در سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن چنین است:



$$E^\circ = 1.23 - 0 = 1.23\text{V}$$

۷۲. گزینه ۲ درست است.

عبارت اول درست است. عدد اکسایش هر اتم نیتروژن برابر ۳- است.

عبارت دوم درست است. عدد اکسایش کربن در CH_2O برابر صفر است.

عبارت سوم درست است. در این ترکیب اتم‌های کربن دارای ۵ نوع عدد اکسایش (صفر، ۲-، ۱+، ۳+ و ۴+) هستند.

عبارت چهارم درست است. اتم H متصل به N توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با آب را دارد.

عبارت پنجم نادرست است؛ زیرا فرمول این ترکیب $\text{C}_5\text{H}_8\text{N}_2\text{O}_4\text{F}$ است که در مجموع ۱۵ اتم دارد. مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن (صفر، ۲-، ۱+، ۳+ و ۴+) برابر ۶ است.

۷۳. گزینه ۴ درست است.

عبارت «الف» درست است. همواره نیم‌واکنش اکسایش در آند انجام می‌شود.

عبارت «ب» درست است. جهت حرکت الکترون‌ها در سلول‌های گالوانی و الکترولیتی همواره از آند به سمت کاتد است.

عبارت «پ» نادرست است. سلول گالوانی دیواره متخلخل دارد اما سلول الکترولیتی تنها یک الکترولیت دارد و نیازی به دیواره ندارد.

عبارت «ت» نادرست است. واکنش کلی در سلول گالوانی خودبخودی است اما واکنش کلی در سلول الکترولیتی غیر خودبخودی است.

۷۴. گزینه ۳ درست است.

مول NaCl را n_1 و مول MgCl_2 را n_2 در نظر می‌گیریم و با توجه به جرم مولی $(58.5\text{g})\text{NaCl}$ و $(95\text{g})\text{MgCl}_2$ می‌توان نوشت:

$$58.5n_1 + 95n_2 = 497$$

در ضمن هر مول NaCl ، یک مول الکترون و هر مول MgCl_2 ، دو مول الکترون می‌گیرند تا تجزیه شوند، پس می‌توان نوشت:

$$n_1 + 2n_2 = 10$$

می‌توان این دستگاه را حل کرد:

$$\begin{cases} 58.5n_1 + 95n_2 = 497 \\ n_1 + 2n_2 = 10 \Rightarrow n_1 = 2, n_2 = 4 \text{ mol} \end{cases}$$

پس ۲ مول Na و ۴ مول Mg تولید می‌شود.

$$\text{Na} \text{ ۲ مول } = 2 \times 23 = 46\text{g}$$

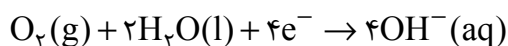
$$\text{Mg} \text{ ۴ مول } = 4 \times 24 = 96\text{g}$$

$$96 - 46 = 50$$

تفاوت جرم فلزهای تولیدشده در کاتد ۵۰ گرم است.

۷۵. گزینه ۲ درست است.

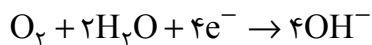
مطلب اول نادرست است؛ زیرا در حلی خراش دیده، مولکول‌های اکسیژن محلول در آب الکترون می‌گیرند و کاهش می‌یابند:



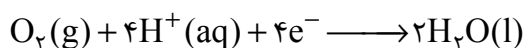
مطلب دوم درست است. در آهن سفید خراش دیده، اتم‌های روی اکسید می‌شوند.

مطلب سوم درست است. در برقکافت آب نیم‌واکنش $2H_2O(l) \rightarrow 2H^+(aq) + O_2(g) + 4e^-$ در قطب مثبت (آند) انجام می‌شود.

مطلب چهارم درست است. در فرآیند خوردگی آهن در محیط خنثی ($pH = 7$) مولکول‌های اکسیژن کاهش می‌یابند:



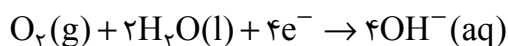
اما در محیط اسیدی مولکول‌های O_2 در حضور H^+ ، کاهش می‌یابند.



۷۶. گزینه ۱ درست است.

عبارت «الف» نادرست است؛ زیرا زنگ زدن آهن خودبه‌خودی است پس یک سلول گالوانی محسوب می‌شود.

عبارت «ب» درست است. نیم‌واکنش کاهش در خوردگی آهن به‌صورت زیر انجام می‌شود و یون هیدروکسید تولید می‌کند.



عبارت «پ» نادرست است؛ زیرا برای حفاظت کاتدی آهن باید فلزی با E° کوچک‌تر از E° آهن (کوچک‌تر از $-0.41V$) به آن متصل کرد.

عبارت «ت» درست است. فلز به‌کار رفته در حلبی، قلع (Sn) است که با اسید موجود در مواد غذایی واکنش نمی‌دهد.

۷۷. گزینه ۴ درست است.

عبارت اول درست است. آبکاری در یک سلول الکترولیتی انجام می‌شود.

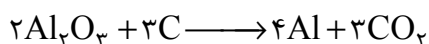
عبارت دوم درست است. فلز پوشاننده باید اکسید شود. از این رو به قطب مثبت باتری «آند» متصل می‌شود تا نیم‌واکنش اکسایش در آن انجام شود.

عبارت سوم درست است. برای آبکاری با فلز M باید الکترولیت دارای کاتیون‌های فلز M (مثلاً M^{2+}) باشد.

عبارت چهارم درست است. جسمی را که می‌خواهیم آبکاری کنیم. نقش کاتد سلول را ایفا می‌کند زیرا نیم‌واکنش کاهش، بر سطح آن انجام می‌شود.

۷۸. گزینه ۳ درست است.

واکنش انجام شده در سلول هال چنین است:



در این واکنش به‌ازای ۱۲ مول الکترون، ۳ مول گاز CO_2 تولید می‌شود:

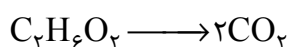
$$9,03 \times 10^{24} \times \frac{1 \text{ mole}^-}{6,02 \times 10^{23}} \times \frac{3 \text{ mol } CO_2}{12 \text{ mole}^-} \times \frac{1 \text{ mol CaO}}{1 \text{ mol } CO_2} \times \frac{56 \text{ g CaO}}{1 \text{ mol CaO}} = 210 \text{ g CaO}$$

(معادله حذف CO_2 به‌صورت $CaO(s) + CO_2(g) \rightarrow CaCO_3(s)$ است.)

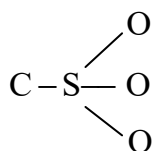
۷۹. گزینه ۱ درست است.

الف) فرمول اتیلن گلیکول $C_2H_6O_2$ است که مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در آن برابر ۲- است.

$$(x + 6 - 4 = 0, x = -2)$$



پس در مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن ۱۰ درجه افزایش یافته است.



ب) ساختار لوویس گروه SO_3^- در پاک‌کننده غیرصابونی چنین است:

پس الکترون‌های نسبت داده‌شده به آن، برابر ۲ است که باعث می‌شود عدد اکسایش آن $+4 = 6 - 2$ شود.

۸۰. گزینه ۳ درست است.

عبارت اول نادرست است؛ زیرا گاز تولیدشده در آند سلول هال، گاز O_2 است اما گاز خروجی از آند CO_2 است.

عبارت دوم درست است؛ زیرا با گذشت زمان یون‌های Ag^+ محلول کاهش می‌یابند $(\text{Ag}^+(\text{aq}) + \text{e}^- \rightarrow \text{Ag}(\text{s}))$ از

طرف دیگر آند نقره‌ای اکسید می‌شود و دوباره یون Ag^+ تولید می‌کند.

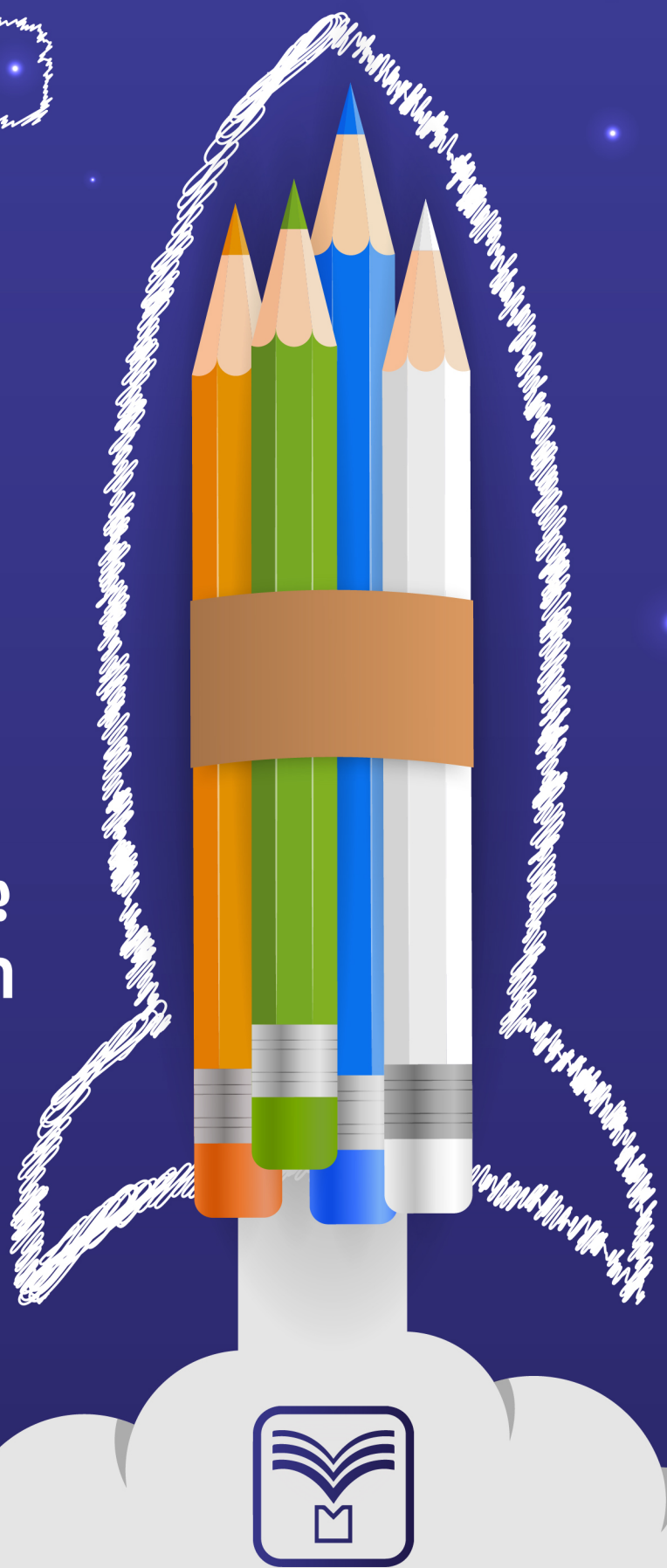
عبارت سوم درست است. اگر اکسندگی A^{2+} از D^{2+} بیشتر باشد، کاهندگی فلز A از D کمتر است. از این‌رو اگر دو فلز A

و D با هم در تماس باشند فلز D که کاهنده‌تر است اکسید می‌شود و فلز A محافظت می‌شود.

عبارت چهارم درست است. اگر عدد اکسایش اتم مرکزی در گونه‌ای بیشینه عدد اکسایش آن اتم باشد. آن گونه دیگر نمی‌تواند اکسید شود و خاصیت کاهندگی ندارد.



به امید رایتون
sanjeshine.com



درمدار
آزمونیتون

درمدار
کنکوریتون

درمدار
امتحانیتون

.....



شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان بخش آموزش کشور

سانجشاینه

مجموعه فیلم‌های آموزشی
ویژه پایه‌های دهم، یازدهم، دوازدهم و داوطلبان کنکور

ریاضی - تجربی